Аномалия — наиболее информативная
часть явления.

7.4. *ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ*

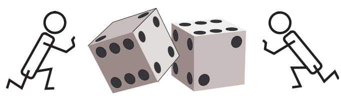
Геометрия Евклида не определяет точек и прямых. Теория вероятностей «не знает», что такое вероятность элементарного события. Число из $[0,1]$. Первичное понятие, априори заданное. Вероятности сложных событий — другое дело. Этим, собственно, и занимается теория. *Стартовая площадка теории вероятностей очень проста. Рассматривается конечное или бесконечное множество*[1]

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\},$$

называемое ***пространством элементарных событий****, на котором задана функция* $p(\omega_i)$*, принимающая значения из* $[0,1]$ *и удовлетворяющая условию нормировки* $\sum p(\omega_i) = 1$*. Значения* $p(\omega_i)$ *считаются* ***вероятностями элементарных событий*** ω_i*. Множества* $A \subset \Omega$ *называют событиями и определяют их вероятности как*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i). \qquad (1)$$

Вот и весь фундамент, упрощённо говоря. Исторический путь к нему был долгим и запутанным. Теперь те дороги стали музейными лабиринтами.



[1]Континуальные варианты Ω рассматриваются далее.

Модель (1), разумеется, необходимо научиться привязывать к реальности. Для этого надо посмотреть, как примеры укладываются в общую схему.

• *Из колоды вытаскивается 7 карт. Какова вероятность, что среди них ровно 3 короля и 2 дамы?*

◀ Подтягивание задачи к общей схеме в данном случае совсем просто. Различные способы выбора 7 карт из 36 естественно считать равновероятными элементарными событиями, т. е. $p(\omega_i) = 1/C_{36}^7$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ число сочетаний из n элементов по m элементов.

Число различных выборов, удовлетворяющих условиям задачи, равно $C_4^3 C_4^2 C_{28}^2$. Искомая вероятность есть $C_4^3 C_4^2 C_{28}^2 / C_{36}^7$. ▶

• При размещении k шаров по 365 ячейкам вероятность того, что все шары попадут в разные ячейки, равна $A_{365}^k / 365^k$ **(?)**.

В задачах, где элементарные события *равновероятны*, $\mathbf{P}(A)$ всегда равно числу вариантов, составляющих A, деленному на число всех вариантов:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\textit{число благоприятных вариантов}}{\textit{число всех вариантов}}.$$

На первый взгляд, суть дела тривиальна. Однако не все так просто, как поначалу кажется.

Парадокс Кардано. При бросании двух игральных костей сумма выпавших чисел получается равной — как для 9, так и для 10 — в двух вариантах:

$$\text{сумма } 9 \;\Leftrightarrow\; (3,6)\ (4,5), \qquad \text{сумма } 10 \;\Leftrightarrow\; (4,6)\ (5,5).$$

Но вывод о равенстве вероятностей этих событий — ошибочен. Число способов получения сумм 9 и 10 на самом деле разное:

$$\text{сумма } 9 \;\Leftrightarrow\; (3,6)\ (6,3)\ (4,5)\ (5,4), \qquad \text{сумма } 10 \;\Leftrightarrow\; (4,6)\ (6,4)\ (5,5).$$

Таким образом, из 36 возможных пар чисел 4 пары дают в сумме 9, и только 3 — 10. Вероятности, соответственно, равны 4/36 и 3/36, что подтверждает эксперимент[2].

На данном примере становится понятно, что в подборе пространства Ω элементарных событий имеется определённый произвол. Первый вариант — это 36 равновероятных *упорядоченных* пар (i, j). Второй вариант Ω — это *неупорядоченные* пары (21 пара), но тогда они не равновероятны, — и в этом аккуратно надо разобраться. Задача выглядит то простой, то сложной. Начинаешь присматриваться, и ум заходит за разум. Недаром в такого рода задачах ошибались в том числе великие *Лейбниц* и *Даламбер*.

Путаницу в задаче создаёт независимость суммы от перестановки слагаемых. При последовательном выбрасывании костей — сначала первая, потом вторая — проблемы не возникает. Но кости можно выбрасывать одновременно, они падают вместе, и первая от второй не отличается. Тогда различных вариантов имеется только 21 — и не вполне ясно, почему они не равновероятны[3].

Чтобы полностью развеять туман, полезно выделить подзадачу, в которой проблема сконцентрирована в максимально простом виде. *Какова вероятность при бросании двух костей получить в результате (5,5) и (4,6)*?

Объединение и пересечение событий. *Объединением*, или *суммой событий* A и B называют событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A, B, и обо-

[2]При достаточно большом количестве бросаний двух костей — частоты, с которыми в сумме выпадают 9 и 10, стремятся к указанным вероятностям.

[3]Углубить *непонимание* можно, обратившись к парадоксу Гиббса в статистической физике. Смешение разнородных газов увеличивает энтропию. При естественном угле зрения не ясно, куда исчезает прирост энтропии, когда молекулы газов становятся одинаковы.

значаемое как $A \cup B$ или $A + B$. Первое обозначение прямо указывает, какое множество в Ω отвечает сумме событий.

Пересечением, или *произведением событий* A и B называют событие, состоящее в совместном наступлении A, B, и обозначаемое как $A \cap B$ или AB.

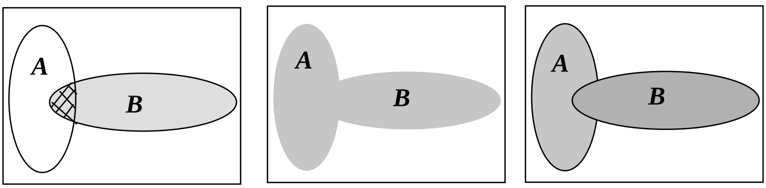
Очевидно,

$$\boxed{\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)}, \qquad (2)$$

поскольку при суммировании ω_i по A и B элементарные события из пересечения AB считаются два раза, и один раз $\mathbf{P}(AB)$ приходится вычесть. Если события не пересекаются, то

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Формулы типа (2) становятся совершенно прозрачны при использовании рисунков объединения и пересечения множеств.



AB **A+B** **A-B**

Опробовать рецепт можно на проверке равенства

$$\mathbf{P}(A+B+C) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(AC)-\mathbf{P}(BC)+\mathbf{P}(ABC).$$

Параллели логических высказываний с операциями над множествами используются достаточно широко. Событию «не A» отвечает дополнение $\bar{A}$ множества A в Ω, а разность $A \setminus B$, или $A - B$, интерпретируется как наступление A, но не B. Наконец, *симметрическая разность*

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

обозначает событие, состоящее в наступлении одного из A, B, но не двух вместе. Пустое множество $\varnothing$, считается, принадлежит Ω и символизирует невозможное событие. При этом $\mathbf{P}(\varnothing)=0$. С учётом нормировки $\mathbf{P}(\Omega)=1$, очевидно, $\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{A})=1$.

> *Перечисленные действия над событиями в совокупности с формулами вычисления вероятностей позволяют решать многие задачи, не спускаясь на уровень рассмотрения пространства элементарных событий. Это экономит усилия, но иногда затрудняет ориентацию.*

Условная вероятность. Вероятность $\mathbf{P}(B|A)$ наступления B при условии наступления в то же время события A, — называют *условной*.

Из всех $\omega_i \in A$ входят в B лишь ω_i, принадлежащие пересечению AB. Они-то и определяют $\mathbf{P}(B|A)$. И если бы A было нормировано, то $\mathbf{P}(B|A)$ равнялось бы $\mathbf{P}(AB)$. Нормировка A корректирует результат очевидным образом:

$$\mathbf{P}(B|A)=\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}. \tag{3}$$

Перезапись (3) в форме

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A). \tag{4}$$

называют *формулой умножения вероятностей.*

Задача. *Имеется три картонки. На одной — с обеих сторон нарисована буква А, на другой — В. На третьей картонке с одной стороны А, с другой — В. Одна из картонок выбирается наугад и кладется на стол. Предположим, на видимой стороне картонки оказывается буква А. Какова вероятность, что на другой стороне — тоже А?*

«Одна вторая», — ошибочно отвечает интуиция, и причина заблуждения далеко не очевидна. Дело в том, что картонка не только случайно выбирается, но и случайно укладывается на одну из сторон. Поэтому логика здесь такая. Всего имеется шесть нарисованных букв, из них — три буквы A, две на картонке AA и одна — на AB. Букву A

из AA вытащить в два раза более вероятно, чем из AB. Получается, вероятность того, что на столе лежит картонка AA, равна $\frac{2}{3}$.

Если кого-то смущают картонки, то это — для простоты и краткости. Реальные прикладные задачи описывать громоздко, а читать скучно. Но таких задач, где здравый смысл терпит фиаско, довольно много. И дело не в том, что ахиллесова пята интуиции приходится на вероятность. Слабое место интуиции в другом. Взаимодействие всего двух факторов ставит воображение в тупик. А комбинация многофакторности с наглядностью — в теории вероятностей такова, что все время искрит.

Независимость. События A и B называют *независимыми*, если $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$, т. е. формула умножения вероятностей (4) переходит в

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B). \tag{5}$$

Из (5), в свою очередь, следует $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$.

Понятие независимости играет фундаментальную роль в теории вероятностей, но (5) не вполне отвечает интуитивному пониманию независимости, что имеет смысл сразу оговорить.

Парадокс Бернштейна. Бросают две монеты. Пусть выпадение первой монеты гербом обозначает событие A, второй — B. Наконец C означает, что только одна монета выпала гербом.

Для симметричных монет все три события попарно независимы, поскольку

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \qquad P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}. \tag{6}$$

С независимостью A и B интуиция согласна, но не с независимостью A и C (или B и C). И у нее есть основания. Независимость (6) имеет как бы «арифметический» характер, является результатом численного совпадения. Качественные отличия взаимосвязей событий выявляются при нарушении симметрии монет. Для несимметричных монет (с вероятностью выпадения герба $\neq 1/2$) свойство независимости A и B вида (5) сохраняется, а вот равенства

$$P(AC) = P(A)P(C) \quad \text{и} \quad P(BC) = P(B)P(C)$$

нарушаются.

Тем не менее, именно «арифметическое» понимание (5) определяет независимость в теории вероятности.

Исходное определение n независимых событий имеет вид

$$\mathbf{P}(A_1 \cdots A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdots \mathbf{P}(A_n).$$

В сценарии парадокса Бернштейна в случае (6) $\mathbf{P}(ABC) = 0$ при ненулевых вероятностях событий A, B, C, откуда ясно, что из *попарной* независимости A, B, C — их независимость не следует.

Обратно. *Возможна независимость при отсутствии попарной независимости.* Соответствующий пример дает бросание двух упорядоченных костей (красной и синей) [**?**]:

$$\begin{aligned} A &= \{(i,j) : 1, 2 \text{ или } 5\}, \\ B &= \{(i,j) : 4, 5 \text{ или } 6\}, \\ C &= \{(i,j) : i + j = 9\}. \end{aligned}$$

Примеры подобного сорта свидетельствуют о наличии подводных течений, но на практике независимость обычно хорошо работает, минуя аномалии. «Аномалий» однако хватает в других ответвлениях. Вот пример.

Парадокс транзитивности. Сравнивая случайные величины X и Y, будем говорить «*X больше Y по вероятности*», — если

$$\mathbf{P}\{X > Y\} > \mathbf{P}\{X \leqslant Y\},$$

т. е. вероятность неравенства $X > Y$ больше $1/2$.

Пусть пространство элементарных событий Ω состоит из 6 точек, в которых с.в. X, Y, Z, W с равной вероятностью $1/6$ принимают значения согласно таблице[4]:

[4]Функция X, например, может быть реализована бросанием шестигранной кости, грани которой помечены цифрами $\{6\ 6\ 2\ 2\ 2\ 2\}$.

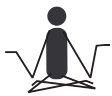
X	6	6	2	2	2	2
Y	5	5	5	1	1	1
Z	4	4	4	4	0	0
W	3	3	3	3	3	3

Очевидно, $X = 6$ с вероятностью $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. В этом случае $X > Y$ независимо от значения Y. С вероятностью $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ величина X равна 2. Тогда $X > Y$, если $Y = 1$, что имеет вероятность $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Поэтому, с учетом формул умножения вероятностей и суммы непересекающихся событий, итоговая вероятность неравенства $X > Y$ равна

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично подсчитывается, что $Y > Z$, $Z > W$, — с той же вероятностью $\frac{2}{3}$. Получается цепочка неравенств

$$X > Y > Z > W.$$



Возможность $W > X$ представляется в некотором роде дикой. Тем не менее, $W > X$ с вероятностью $\frac{2}{3}$ (**!**).